

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية

الرياضيات 3

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثالثة

كتاب التمارين

قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

٢ وزارة التعليم ، ١٤٤٥هـ

وزارة التعليم
الرياضيات ٣ (كتاب التمارين) - التعليم الثانوي - نظام المسارات -
السنة الثالثة. / وزارة التعليم - ط ١٤٤٥ - الرياض ، ١٤٤٥هـ
٥٣ ص ؛ ٢٧.٥ x ٢١ سم

رقم الإيداع: ١٤٤٥/١٤٤٤١
ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٥١١-٦٢٠-٦

مواد إثنائية وداعمة على "منصة عين الإثنائية"



ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.



fb.ien.edu.sa



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه.

عزيزي الطالب، نقدّم لك هذا الكتاب، الذي يضمّ العديد من التمارين المتنوعة والشاملة لكل درس، وهي امتداد للتمارين الواردة في كتابك المدرسي. وقد أعدت هذه التمارين بعناية؛ لتساعدك على التعلّم، وتُفسّح لك المجال للتدرّب على المهارات الأساسية لكل درس.

وقد خُصّص لكل تمرين فراغ، لتدوّن إجابتك فيه. ولا يتسع هذا الفراغ - غالباً - إلا للإجابة النهائية، وهذا لا يمنع أن تستعمل أوراقاً إضافية لتدوّن فيها خطوات حلّك.

ويمكنك حلّ هذه التمارين داخل الفصل تحت إشراف معلمك وتوجيهه، وقد يحدد لك المعلم بعضاً منها لتكون واجباً منزلياً.

وإننا - إذ نقدم لك عزيزي الطالب هذا الكتاب - لنأمل أن يجعل لتعلّم مادة الرياضيات متعة أكثر، وفائدة أكبر.

والله ولي التوفيق





وزارة التعليم

Ministry of Education
2026 - 1448

الفصل الأول:

تحليل الدوال

- 1-1 الدوال _____ 10
- 1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات 11
- 1-3 الاتصال والنهيات _____ 12
- 1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير — 13
- 1-5 الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية 14
- 1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين — 15
- 1-7 العلاقات والدوال العكسية _____ 16

الفصل الثاني:

العلاقات والدوال الأسية

واللوغاريتمية

- 2-1 الدوال الأسية _____ 17
- 2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية _____ 18
- 2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية _____ 19
- 2-4 خصائص اللوغاريتمات _____ 20
- 2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية — 21
- 2-6 اللوغاريتمات العشرية _____ 22



الفصل الثالث:

المتطابقات والمعادلات المثلثية

- 3-1 المتطابقات المثلثية _____ 23
- 3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية _____ 24
- 3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين
والفرق بينهما _____ 25
- 3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها _____ 26
- 3-5 حل المعادلات المثلثية _____ 27

الفصل الرابع:

القطوع المخروطية

- 4-1 القطوع المكافئة _____ 28
- 4-2 القطوع الناقصة والدوائر _____ 29
- 4-3 القطوع الزائدة _____ 30
- 4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية _____ 31



الفصل الخامس:

المتجهات

- 5-1 مقدمة في المتجهات _____ 32
- 5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي _____ 33
- 5-3 الضرب الداخلي _____ 34
- 5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد _____ 35
- 5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي _____ 36
- للمتجهات في الفضاء _____ 36

الفصل السادس:

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

- 6-1 الإحداثيات القطبية _____ 37
- 6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية _____ 38
- للمعادلات _____ 38
- 6-3 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر _____ 39



الفصل السابع:

الاحتمال والإحصاء

- 7-1 الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة
40 على الملاحظة
- 7-2 التحليل الإحصائي
41
- 7-3 الاحتمال المشروط
42
- 7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية
43
- 7-5 التوزيع الطبيعي
44
- 7-6 التوزيعات ذات الحدين
45

الفصل الثامن:

النهايات والاشتقاق

- 8-1 تقدير النهايات بيانياً
46
- 8-2 حساب النهايات جبرياً
47
- 8-3 المماس والسرعة المتجهة
48
- 8-4 المشتقات
49
- 8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل
50
- 8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
51



الفصل الأول: تحليل الدوال

الدوال

1 - 1

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

$$-6.5 < x \leq 3 \quad (2)$$

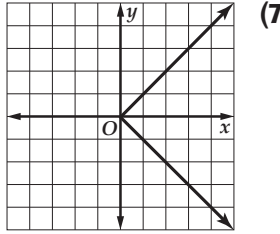
$$\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \} \quad (1)$$

$$x > 8 \text{ أو } x < 0 \quad (4)$$

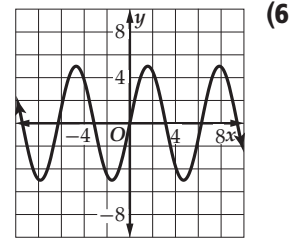
$$x < 3 \quad (3)$$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

(5) تمثل x رقم لوحة السيارة، و y سنة صنع السيارة.



(7)



(6)

$$x = 5(y - 1)^2 \quad (9)$$

$$-x + y = 3x \quad (8)$$

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

$$f(a) = -3\sqrt{a^2 + 9} \quad (11)$$

$$f(4) \quad (a)$$

$$f(3a) \quad (b)$$

$$f(a + 1) \quad (c)$$

$$h(x) = x^2 - 8x + 1 \quad (10)$$

$$h(-1) \quad (a)$$

$$h(2x) \quad (b)$$

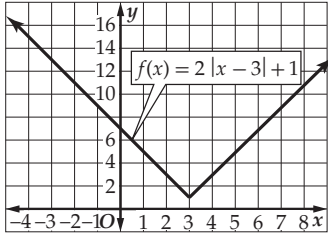
$$h(x + 8) \quad (c)$$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

$$h(t) = \frac{2t - 6}{t^2 + 6t + 9} \quad (13)$$

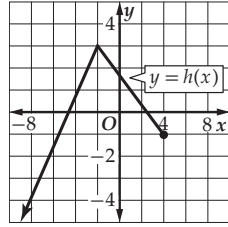
$$g(x) = \sqrt{-3x - 2} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16, & x < 2 \\ \sqrt{x - 2}, & 2 < x \leq 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases} \quad (14) \text{ أوجد } f(-4) \text{ و } f(11) \text{ للدالة}$$

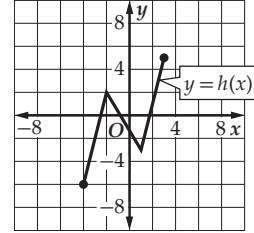


(1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5)$, $f(1)$, $f(7)$ ، ثم تحقق من إجابتك جبرياً.

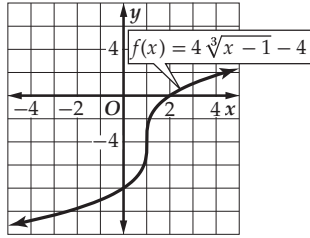
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.



(3)

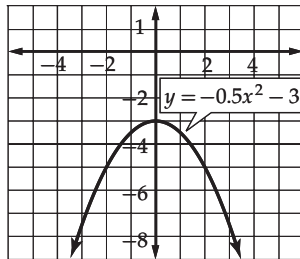


(2)

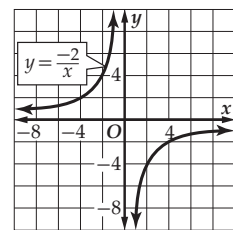


(4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبرياً.

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. وعزّز إجابتك عددياً، ثم تحقق منها جبرياً:



(6)



(5)

(7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانياً، ثم حلّل منحناها؛ لتحديد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبرياً. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها.



حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+4}; x = -4 \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{2}{3x^2}; x = -1 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}; x = -1, x = -2 \quad (4)$$

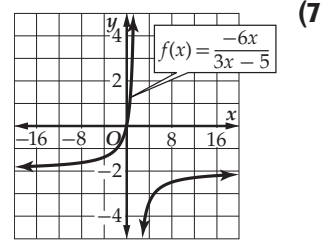
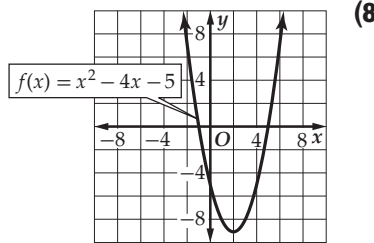
$$f(x) = x^3 - 2x + 2; x = 1 \quad (3)$$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

$$g(x) = x^4 + 10x - 6; [-3, 2] \quad (6)$$

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4; [-6, 2] \quad (5)$$

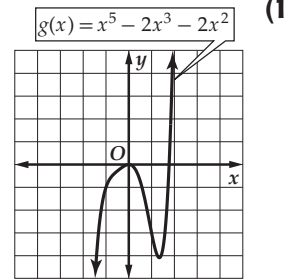
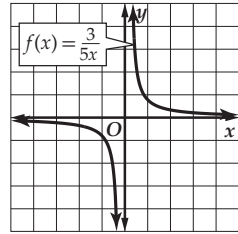
استعمل التمثيل البياني لكلّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًا:



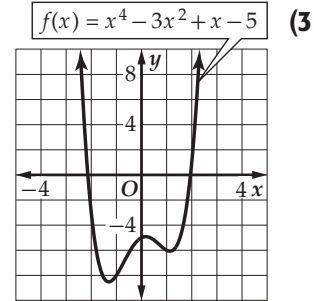
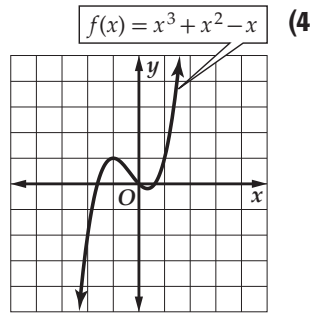
(9) **إلكترونيات:** يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟



استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا:



قدّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.



(5) استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$. وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

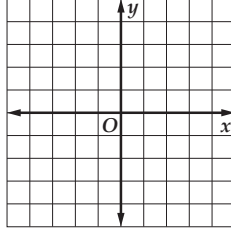
(7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$

(6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$

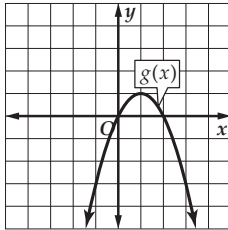
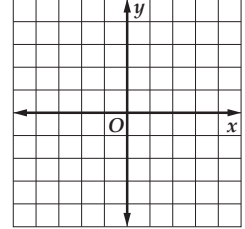
(8) **فيزياء:** إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً يُعطى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$ ، فأوجد السرعة المتوسطة للصاروخ.



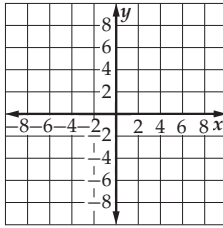
(2) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانياً.



(1) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانياً.

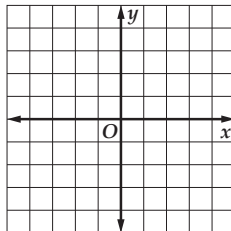


(3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

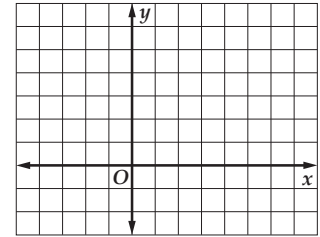


(4) عيّن الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x+2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلّهما بيانياً في المستوى الإحداثي.

(6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = |(x+1)^3|$



(5) مثلّ الدالة بيانياً $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -3 \\ 1+x, & -2 < x \leq 2 \\ [x], & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$



أوجد $(\frac{f}{g})(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

$$f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1} \quad (2)$$

$$f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6 \quad (1)$$

أوجد $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $[f \circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = 3x \quad (4)$$

$$f(x) = x + 5, g(x) = x - 3 \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5, g(x) = 2x - 1 \quad (6)$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x - 3 \quad (5)$$

حدد مجال $f \circ g$, ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

$$f(x) = \frac{1}{x-8} \quad (8)$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (7)$$

$$g(x) = x^2 + 5$$

$$g(x) = 3x$$

أوجد دالتين f و g في كل من السؤالين 9, 10، بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

$$h(x) = \frac{1}{3x+3} \quad (10)$$

$$h(x) = \sqrt{2x-6} - 1 \quad (9)$$

(11) مطعم: دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كل منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.



مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

$$f(x) = -\sqrt{x+3} - 1 \quad (2)$$

$$f(x) = 3|x| + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{5} + 9 \quad (4)$$

$$f(x) = x^5 + 5x^3 \quad (3)$$

في كلّ مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب: غير موجودة.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+7} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (8)$$

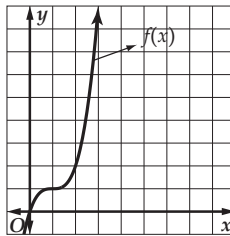
$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2} \quad (7)$$

أثبت جبرياً أن كلاً من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلّ من السؤالين الآتيين:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6; x \geq 0; g(x) = \sqrt{2x+12} \quad (10)$$

$$f(x) = 2x + 3; g(x) = \frac{x-3}{2} \quad (9)$$

(11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$:



(12) مكافحة الحرائق: تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء

للوصل إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة.

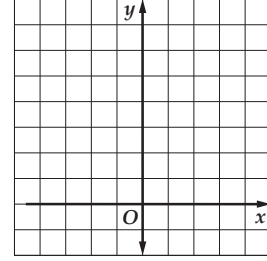
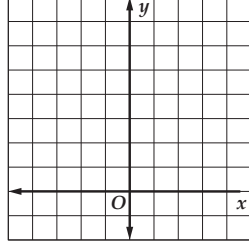


الفصل الثاني: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2 - 1 الدوال الأسية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدّد مجالها، ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:

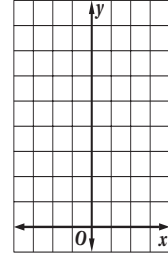
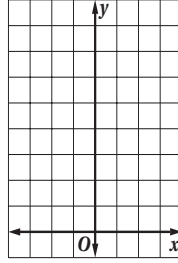
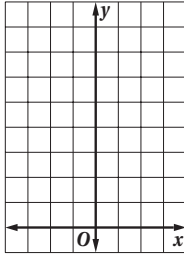
$$(1) \quad y = 3(11)^x, \quad y = 3(11)^{-0.2} \quad (2) \quad y = \left(\frac{1}{12}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{12}\right)^{0.5}$$



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها، ومداها.

$$(3) \quad y = 1.5(2)^x$$

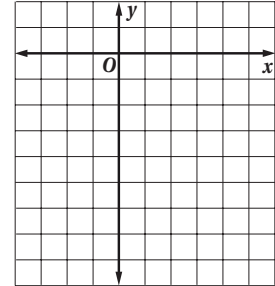
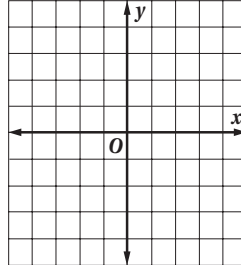
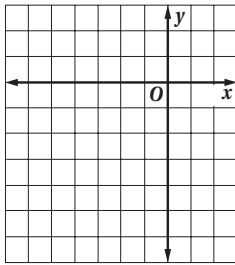
$$(4) \quad y = 4(3)^x$$



$$(5) \quad y = 3(0.5)^x$$

$$(6) \quad y = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8$$

$$(7) \quad y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$$



(9) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يوميًا.

(a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم.

(b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟

(10) جامعات: بلغ عدد طلاب السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1445 هـ، ويُتوقع زيادة العدد

بنسبة 5% سنويًا. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلاب السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 1445 هـ.

حل كل معادلة مما يأتي:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2} \quad (2)$$

$$4^{x+35} = 64^{x-3} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1} \quad (4)$$

$$3^{x-4} = 9^{x+28} \quad (3)$$

$$3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1} \quad (5)$$

$$10^{2x+7} = 1000^x \quad (8)$$

$$400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (7)$$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

$$(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75) \quad (11)$$

$$(0, 8), (4, 2048) \quad (10)$$

$$(0, 5), (4, 3125) \quad (9)$$

$$(0, 0.7), \left(\frac{1}{2}, 3.5\right) \quad (14)$$

$$(0, 15), \left(2, \frac{15}{16}\right) \quad (13)$$

$$(0, -0.2), (-3, -3.125) \quad (12)$$

حل كل متباينة مما يأتي:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq 64^{x-1} \quad (17)$$

$$10^{2x+7} \geq 1000^x \quad (16)$$

$$400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (15)$$

$$128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x} \quad (20)$$

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \leq 216^{x-3} \quad (19)$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5} \quad (18)$$

(21) علوم: إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t ، وعددها في عينة B يساوي

216^{t+18} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساوياً في العيتين؟



اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad (3)$$

$$\log_2 64 = 6 \quad (2)$$

$$\log_6 216 = 3 \quad (1)$$

$$\log_{32} 8 = \frac{3}{5} \quad (6)$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\log_{10} 0.00001 = -5 \quad (4)$$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$$3^4 = 81 \quad (9)$$

$$7^0 = 1 \quad (8)$$

$$5^3 = 125 \quad (7)$$

$$7776^{\frac{1}{5}} = 6 \quad (12)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad (11)$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81} \quad (10)$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 \quad (16)$$

$$\log_2 \frac{1}{16} \quad (15)$$

$$\log_{10} 0.0001 \quad (14)$$

$$\log_3 81 \quad (13)$$

$$\log_6 6^4 \quad (20)$$

$$\log_7 \frac{1}{49} \quad (19)$$

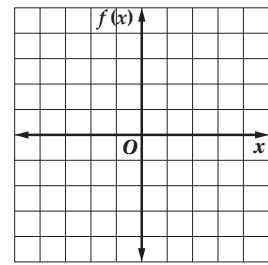
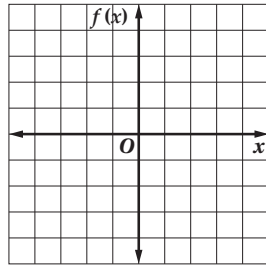
$$\log_8 4 \quad (18)$$

$$\log_9 1 \quad (17)$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

$$f(x) = -2 \log_4 x \quad (22)$$

$$f(x) = \log_2 (x - 2) \quad (21)$$



(23) صوت: تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوت شدته 120 dB؟

(24) استثمار: استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4%، وتُضاف الأرباح سنويًا إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [100000(1 + 0.04)^5]$ ، فاكتب المعادلة على الصورة الأسية.



استعمل $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ، $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ لتقريب قيمة كل مما يأتي :

$\log_{10} 25$ (2)

$\log_{10} 35$ (1)

$\log_{10} \frac{5}{7}$ (4)

$\log_{10} \frac{7}{5}$ (3)

$\log_{10} 175$ (6)

$\log_{10} 245$ (5)

$\log_{10} \frac{25}{7}$ (8)

$\log_{10} 0.2$ (7)

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$\log_8 [(4x + 2)^3 (x - 4)]$ (10)

$\log_2 [(2x)^3 (x + 1)]$ (9)

$\log_2 \frac{(x + 1)^3}{\sqrt[3]{x + 5}}$ (12)

$\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x - 3}}$ (11)

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$3 \log_2 (5x + 6) - \frac{1}{2} \log_2 (x - 4)$ (13)

$2 - \log_7 6 - 2 \log_7 x$ (14)

$\log_3 8 + \log_3 x - 2 \log_3 (x + 4)$ (15)

$\log_{10} y + \log_{10} 3 - \frac{1}{3} \log_{10}(x) + 2 \log_{10} z$ (16)

$\log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 z$ (17)

احسب قيمة كل مما يأتي :

$\log_2 \sqrt[5]{4}$ (20)

$\log_{100} 10000$ (19)

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ (18)

(21) صوت: تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تُعطى بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟



حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

$$\log_3 (4x - 17) = 5 \quad (2)$$

$$x + 5 = \log_4 256 \quad (1)$$

$$\log_6 (3 - x) \leq \log_6 (x - 1) \quad (4)$$

$$\log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x \quad (3)$$

$$\log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x \quad (6)$$

$$\log_8 (-6x) = 1 \quad (5)$$

$$\log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4 \quad (8)$$

$$\log_7 n = \frac{2}{3} \log_7 8 \quad (7)$$

$$\log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4 \quad (10)$$

$$\log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54 \quad (9)$$

$$4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405 \quad (12)$$

$$\log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u \quad (11)$$

$$\log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8 \quad (14)$$

$$\log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3} \log_3 64 \quad (13)$$

$$\log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4 \quad (16)$$

$$\log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2 \quad (15)$$

$$\log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6 \quad (18)$$

$$\log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12 \quad (17)$$

$$\log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1 \quad (20)$$

$$\log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1) \quad (19)$$

$$\log_8 (n - 3) + \log_8 (n + 4) = 1 \quad (22)$$

$$\log_{10} 4 + \log_{10} w = 2 \quad (21)$$

$$\log_{16} (9x + 5) - \log_{16} (x^2 - 1) = \frac{1}{2} \quad (24)$$

$$3 \log_5 (x^2 + 9) - 6 = 0 \quad (23)$$

$$\log_2 (5y + 2) - 1 = \log_2 (1 - 2y) \quad (26)$$

$$\log_6 (2x - 5) + 1 = \log_6 (7x + 10) \quad (25)$$

$$\log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72 \quad (28)$$

$$\log_{10} (c^2 - 1) - 2 = \log_{10} (c + 1) \quad (27)$$

$$\log_9 (x + 2) > \log_9 (6 - 3x) \quad (30)$$

$$\log_8 (-6x) < 1 \quad (29)$$

$$\log_2 (x + 6) < \log_2 17 \quad (32)$$

$$\log_{81} x \leq 0.75 \quad (31)$$

$$\log_{10} (x - 5) > \log_{10} 2x \quad (34)$$

$$\log_{12} (2x - 1) > \log_{12} (5x - 16) \quad (33)$$

$$\log_2 (x + 3) < \log_2 (1 - 3x) \quad (35)$$



استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log 0.05 \quad (3)$$

$$\log 2.2 \quad (2)$$

$$\log 101 \quad (1)$$

استعمل الصيغة $\text{pH} = -\log[H^+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

$$[H^+] = 2.51 \times 10^{-7} \text{ mol/L} \quad (4) \text{ الحليب}$$

$$[H^+] = 2.51 \times 10^{-6} \text{ mol/L} \quad (5) \text{ المطر الحمضي}$$

$$[H^+] = 1.0 \times 10^{-5} \text{ mol/L} \quad (6) \text{ القهوة}$$

$$[H^+] = 3.16 \times 10^{-11} \text{ mol/L} \quad (7) \text{ الحليب الغني بالماغنيسيوم}$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$3.5^x = 47.9 \quad (10)$$

$$6^z = 45.6 \quad (9)$$

$$5^a = 120 \quad (8)$$

$$2^{a-4} = 82.1 \quad (13)$$

$$4^{2x} = 27 \quad (12)$$

$$8.2^y = 64.5 \quad (11)$$

$$5^{x^2-3} = 72 \quad (16)$$

$$30^{x^2} = 50 \quad (15)$$

$$5^{w+3} = 17 \quad (14)$$

$$2^{n+1} \leq 5^{2n-1} \quad (18)$$

$$4^{2x} > 9^{x+1} \quad (17)$$

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log_{11} 9 \quad (21)$$

$$\log_8 32 \quad (20)$$

$$\log_5 12 \quad (19)$$

$$\log_7 \sqrt{8} \quad (24)$$

$$\log_9 6 \quad (23)$$

$$\log_2 18 \quad (22)$$

(25) درجة الحموضة: استعمل الصيغة الواردة في الأسئلة 4-7 أعلاه. إذا كان الرقم الهيدروجيني (pH) لمحلول الخل 2.9، وللحليب 6.6، فكم مرة (تقريباً) يساوي تركيز أيون الهيدروجين في الخل تركيزه في الحليب؟

(26) أحياء: تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. ما الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟

(27) صوت: تُعطى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة من شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار تساوي شدة الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟

الفصل الثالث: المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-1 المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

(1) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$ (2) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{2}$

(3) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = 4$ (4) $\cot \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = \frac{2}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(5) $\sec \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = -\frac{15}{17}$ (6) $\cot \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -\frac{3}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

(7) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{10}$ (8) $\sec \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -8$

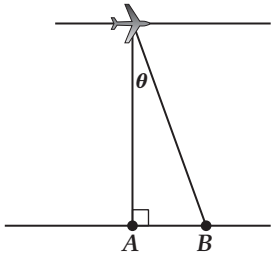
(9) $\sin \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ (10) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(11) $\csc \theta \tan \theta$ (12) $\frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta}$ (13) $\sin^2 \theta \cot^2 \theta$

(14) $\cot^2 \theta + 1$ (15) $\frac{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$ (16) $\frac{\csc \theta - \sin \theta}{\cos \theta}$

(17) $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$ (18) $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$ (19) $\sec^2 \theta \cos^2 \theta + \tan^2 \theta$



(20) التصوير الجوي: يُبين الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A. وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، بحسب العلاقة: $\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos \theta$ فقط.



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \quad (1)$$

$$\tan^4 \theta + 2 \tan^2 \theta + 1 = \sec^4 \theta \quad (4)$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = \cos^2 \theta \quad (3)$$

$$\sin^2 \theta (\csc^2 \theta + \sec^2 \theta) = \sec^2 \theta \quad (6)$$

$$\cos^2 \theta \cot^2 \theta = \cot^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (5)$$

(7) **فيزياء:** مربع السرعة الابتدائية لجسيم قذف من سطح الأرض هو $v^2 = \frac{2gh}{\sin^2 \theta}$ ، حيث θ زاوية القذف،

و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2 \theta} = \frac{2gh \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta - 1}$$

(8) **ضوء:** تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I = ER^2 \sec \theta$ ، حيث E مقدار الإنارة بالشمعة

لكل قدم مربعة على السطح، و R المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ الزاوية بين شعاع الضوء والخط

العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2(1 + \tan^2 \theta) \cos \theta = ER^2 \sec \theta$.



المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin(-165^\circ) \quad (3) \qquad \cos 375^\circ \quad (2) \qquad \cos 75^\circ \quad (1)$$

$$\cos 240^\circ \quad (6) \qquad \sin 150^\circ \quad (5) \qquad \sin(-105^\circ) \quad (4)$$

$$\sin 195^\circ \quad (9) \qquad \sin(-75^\circ) \quad (8) \qquad \sin 225^\circ \quad (7)$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad (10)$$

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta \quad (11)$$

$$\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta \quad (12)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \quad (13)$$

(14) الطاقة الشمسية: في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E \sin(90^\circ - \phi)$ ، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos \phi)$ للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ .

(15) كهرباء: تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2 \sin(120t)$ بعد t ثانية.

(a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين.

(b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.



أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ إذا كان:

$$\sin \theta = \frac{8}{17}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13}; 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (1)$$

$$\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad (4)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4}; 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \quad (8)$$

$$\cos 67.5^\circ \quad (7)$$

$$\tan 15^\circ \quad (6)$$

$$\tan 105^\circ \quad (5)$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta - \sin \theta}{2 \tan \theta} \quad (9)$$

$$\sin 4\theta = 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta \quad (10)$$

(11) صور جوية: في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة

أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط العمودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة الوضوح للنقطة الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ في إثبات أن:

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right)^2$$



حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

$$\sin 2\theta = \cos \theta; 90^\circ \leq \theta < 180^\circ \quad (2) \quad \sqrt{2} \cos \theta = \sin 2\theta; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (1)$$

$$\cos \theta + \cos (90 - \theta) = 0; 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4) \quad \cos 4\theta = \cos 2\theta; 180^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (3)$$

$$\tan^2 \theta + \sec \theta = 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (6) \quad 2 + \cos \theta = 2 \sin^2 \theta; \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \quad (5)$$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

$$\cot \theta = \cot^3 \theta \quad (8) \quad \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \sin \theta \quad (10) \quad \sqrt{2} \sin^3 \theta = \sin^2 \theta \quad (9)$$

$$\sec^2 \theta = 2 \quad (12) \quad 2 \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad (11)$$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\csc^2 \theta - 3 \csc \theta + 2 = 0 \quad (14) \quad \sin^2 \theta \cos \theta = \cos \theta \quad (13)$$

$$\sqrt{2} \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \quad (16) \quad \frac{3}{1 + \cos \theta} = 4(1 - \cos \theta) \quad (15)$$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (18) \quad 4 \sin^2 \theta = 3 \quad (17)$$

$$\cos 2\theta + \sin \theta - 1 = 0 \quad (20) \quad 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta = -1 \quad (19)$$

(21) **كهرباء:** يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $j = 3 \sin 240t$ ،

حيث j شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب عبارة تصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

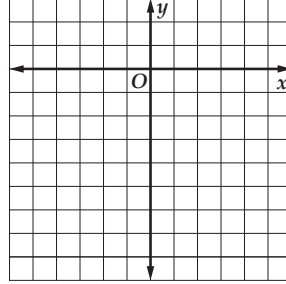
الفصل الرابع: القطوع المخروطية

القطوع المكافئة

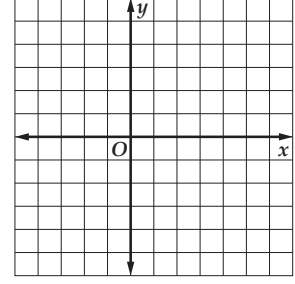
4 - 1

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثمّ مثلّ منحناه بيانياً:

$$y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x \quad (2)$$

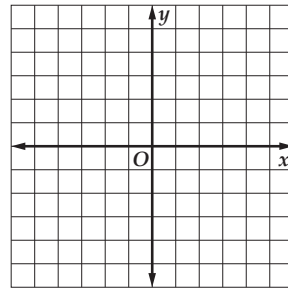


$$(x - 1)^2 = 8(y - 2) \quad (1)$$

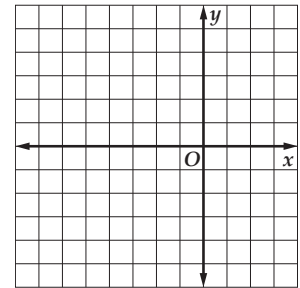


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3، 4، ثمّ مثلّ منحناه بيانياً.

(4) الرأس (0, 1)؛ مفتوح أفقياً إلى اليمين، ويمر بالنقطة (8, -7).



(3) الرأس (-2, 4)، والبؤرة (-2, 3).



(5) اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثمّ حدّد خصائصه.

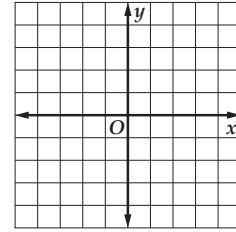
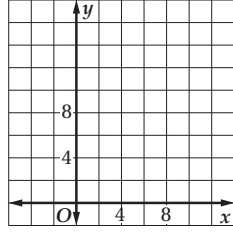
(6) **قمر اصطناعي:** افترض أن طبقاً هوائياً على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجه إلى أعلى. أوجد معادلة تمثّل مقطعاً عرضياً للطبق.



حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلّ مما يلي، ثمّ مثلّ منحاه بيانياً:

$$25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \quad (1)$$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

$$(3) \text{ الرأسان } (4, 6), (-12, 6), \text{ و البؤرتان } (2, 6), (-10, 6)$$

$$(4) \text{ البؤرتان } (-2, 7), (-2, 1), \text{ وطول المحور الأكبر } 10 \text{ وحدات.}$$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

$$\frac{(y+2)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \quad (5)$$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

$$(7) \text{ المركز } (-6, 1), \text{ والقطر } 8.$$

$$(8) \text{ المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر } 3.$$

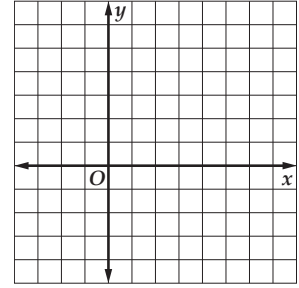
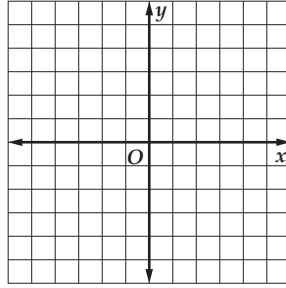
$$(9) \text{ النقطتان } (-4, 1), (2, 3) \text{ طرفا قطر فيها.}$$



حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلّ مما يلي، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad (2)$$

$$x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0 \quad (1)$$



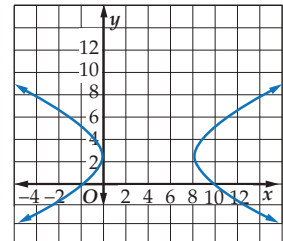
اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

(4) البؤرتان $(0, -4)$ ، $(0, 6)$ ، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

(3) الرأسان $(4, 6)$ ، $(-10, 6)$ ، والبؤرتان $(6, 6)$ ، $(-12, 6)$

$$\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+10)^2}{121} = 1 \quad (5)$$

(6) اكتب معادلة القطع الزائد الممثلة بيانياً كالآتي:



اكتب كلاً من المعادلات الآتية على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$25x^2 - 50x^2 + 16y^2 - 375 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 12y - 6x + 69 = 0 \quad (3)$$

$$9x^2 - 4y^2 + 8y - 40 = 0 \quad (4)$$

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0 \quad (5)$$

$$16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0 \quad (6)$$

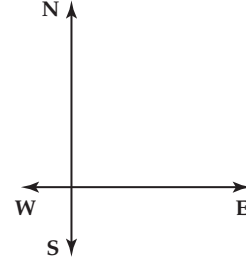
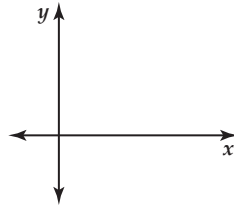
$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0 \quad (7)$$

$$2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0 \quad (8)$$

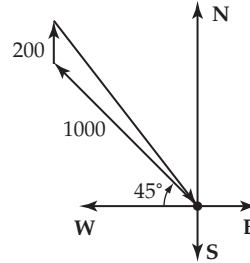


استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه يمثل كل كمية مما يأتي، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

- (1) $r = 60 \text{ m}$ باتجاه $N 45^\circ E$ (2) $t = 100$ باوند باتجاه 60° مع الأفقي



- (3) تسوق: سار محمد مسافة 1000 ft من منزله في اتجاه 45° شمال الغرب، ثم سار 200 ft في اتجاه الشمال؛ فوصل إلى مركز التسوق. كم أصبح بُعد محمد عن منزله؟ وفي أي اتجاه؟



- (4) بناء: يدفع عبد الله صندوقاً يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 60 N وبزاوية قياسها 42° مع الأفقي. ارسماً شكلاً يُبين تحليل القوة التي يؤثر بها عبد الله في الصندوق إلى مركبتيه المتعامدتين.

(b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.



أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$$A(-3, -6), B(8, -1) \quad (3)$$

$$A(4, -2), B(5, -5) \quad (2)$$

$$A(2, 4), B(-1, 3) \quad (1)$$

إذا كان $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

$$\mathbf{w} - 2\mathbf{v} \quad (5)$$

$$3\mathbf{v} \quad (4)$$

$$5\mathbf{w} - 3\mathbf{v} \quad (7)$$

$$4\mathbf{v} + 3\mathbf{w} \quad (6)$$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي:

$$\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle \quad (9)$$

$$\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle \quad (8)$$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي:

$$D(-4, 3), E(5, -2) \quad (11)$$

$$D(4, -5), E(6, -7) \quad (10)$$

$$D(2, 1), E(3, 7) \quad (13)$$

$$D(4, 6), E(-5, -2) \quad (12)$$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

$$|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132^\circ \quad (15)$$

$$|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42^\circ \quad (14)$$

16) بستانة: يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهما. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل 60° عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل 40° عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا.



أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي :

$$(1) \quad u = \langle 3, 6 \rangle, v = \langle -4, 2 \rangle \quad (2) \quad u = -i + 4j, v = 3i - 2j \quad (3) \quad u = \langle 2, 0 \rangle, v = \langle -1, -1 \rangle$$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(4) \quad u = \langle -1, 9 \rangle, v = \langle 3, 12 \rangle$$

$$(5) \quad u = \langle -6, -2 \rangle, v = \langle 2, 12 \rangle$$

$$(6) \quad u = 27i + 14j, v = i - 7j$$

$$(7) \quad u = 5i - 4j, v = 2i + j$$

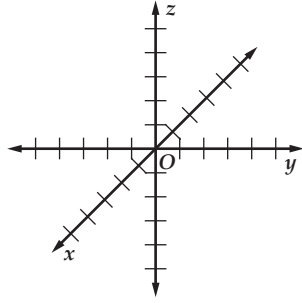
(8) **مواصلات:** انطلق القطاران A, B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

(9) **فيزياء:** يدفع شخص عربة على أرض مستوية بقوة مقدارها 100N ، بزاوية لأسفل قياسها 30° عن الأفقي . أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص إذا حرك العربة مسافة 6m ، وقرب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل الصيغة $W = F \cdot d$ ، حيث W الشغل بالجول، و F القوة بالنيوتن، و d المسافة بالأمتار).

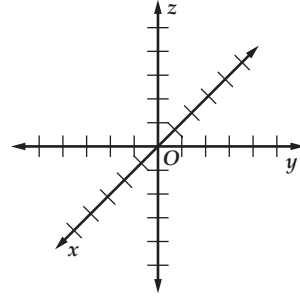


عين كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

(2) $(2, 0, -5)$

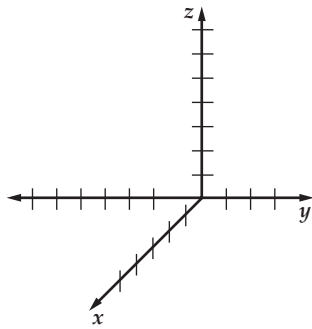


(1) $(-3, 4, -1)$

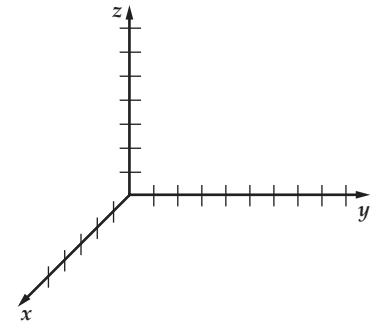


مثل كلاً من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

(4) $\langle 4, -2, 6 \rangle$



(3) $\langle 4, 7, 6 \rangle$



أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي، ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overline{AB}$:

(6) $A(4, 0, 6), B(7, 1, -3)$

(5) $A(2, 1, 3), B(-4, 5, 7)$

(8) $A(6, 8, -5), B(7, -3, 12)$

(7) $A(-4, 5, 8), B(7, 2, -9)$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي :

(10) $(-17, -3, 2), (3, -9, 5)$

(9) $(3, 4, -9), (-4, 7, 1)$

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهين $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 5 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 6, -8, 9 \rangle$

(12) $5\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$

(11) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$



الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين:

(1) $\langle -2, 0, 1 \rangle, \langle 3, 2, -3 \rangle$ (2) $\langle 1, -3, 4 \rangle, \langle -4, -1, 1 \rangle$ (3) $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, -2, 0 \rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

(4) $u = \langle 1, -2, 1 \rangle$ (5) $u = \langle 3, -2, 1 \rangle$ (6) $u = \langle 2, -4, 4 \rangle$
 $v = \langle 0, 3, -2 \rangle$ $v = \langle -4, -2, 5 \rangle$ $v = \langle -2, -1, 6 \rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي $v \times u$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $v \times u$ عمودي على كلٍّ من u, v :

(7) $u = \langle 1, 3, 4 \rangle, v = \langle -1, 0, -1 \rangle$ (8) $u = \langle 3, 1, -6 \rangle, v = \langle -2, 4, 3 \rangle$

(9) $u = \langle 3, 1, 2 \rangle, v = \langle 2, -3, 1 \rangle$ (10) $u = \langle 4, -1, 0 \rangle, v = \langle 5, -3, -1 \rangle$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u, v ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

(11) $u = \langle 9, 4, 2 \rangle, v = \langle 6, -4, 2 \rangle$ (12) $u = \langle 2, 0, -8 \rangle, v = \langle -3, -8, -5 \rangle$

(13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle 3, -2, 9 \rangle, \langle 6, -2, -7 \rangle, \langle -8, -5, -2 \rangle$ أحرفاً متجاورة.



الفصل السادس: الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الإحداثيات القطبية

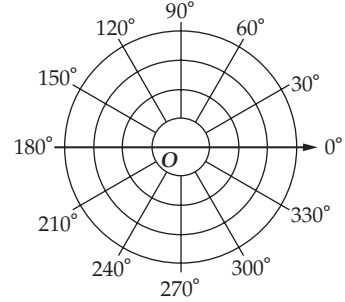
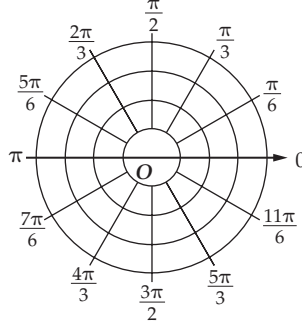
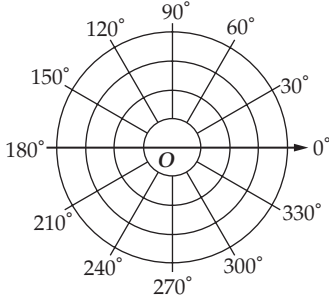
6-1

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي أدناه:

(1) $(2.5, 0^\circ)$

(2) $(-2, \frac{\pi}{4})$

(3) $(-1, -30^\circ)$

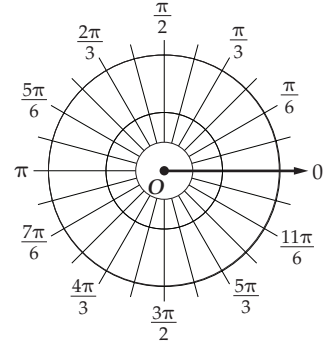
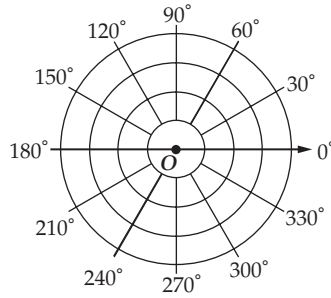
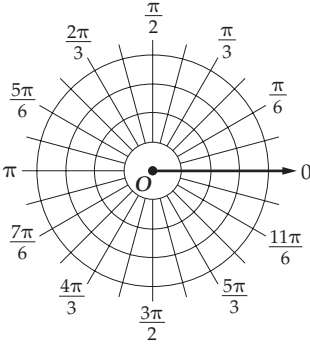


مثّل كل معادلة قطبية مما يأتي بياناً في المستوى القطبي أدناه:

(4) $r = 3$

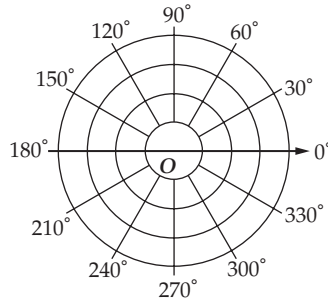
(5) $\theta = 60^\circ$

(6) $r = 4$



(7) منظر طبيعي: صمّم أحد المعمارين حديقة في مبنى جديد.

(a) إذا وضع المصمّم نخلة عند النقطة $(3, -135^\circ)$ ، فمثّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.



(b) إذا أراد المصمّم وضع مقعد عند $(-4, 85^\circ)$ ، وإنشاء بركة عند $(1, 105^\circ)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة، مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

(3) $(4, \frac{\pi}{6})$

(2) $(-4, 45^\circ)$

(1) $(6, 120^\circ)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيات قطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، في كلٍّ مما يأتي:

(6) $(-3, \sqrt{3})$

(5) $(2, -3)$

(4) $(2, 2)$

اكتب كلاً من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

(8) $y = 3$

(7) $x^2 + y^2 = 9$

اكتب كلاً من المعادلتين القطبيتين الآتيتين على الصورة الديكارتية:

(10) $r \cos \theta = 5$

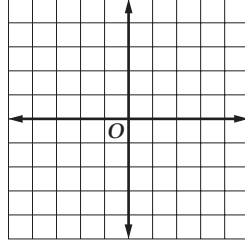
(9) $r = 4$

(11) مساحة: وجد مساح حدًا لأرض عند نقطة إحداثياتها القطبيين $(40, 62^\circ)$. ما الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة؟

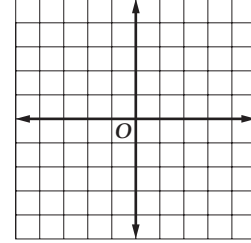


مثّل كلّاً من العددين المركبين الآتيين في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة (قرب إلى أقرب جزء من مئة):

$$-1 + 4i \quad (2)$$



$$2 + 3i \quad (1)$$



اكتب كلّاً من العددين المركبين الآتيين على الصورة القطبية:

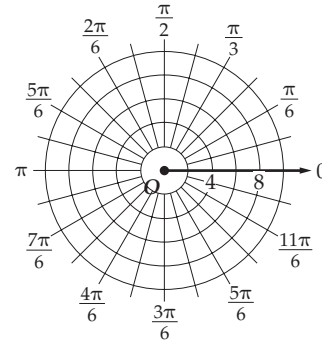
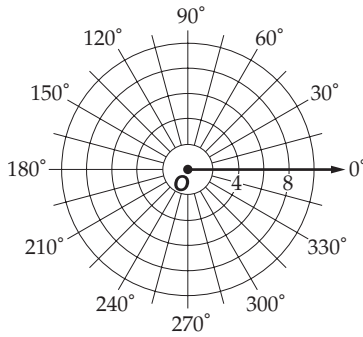
$$3\sqrt{3} - 3i \quad (4)$$

$$2 + 2\sqrt{3}i \quad (3)$$

مثّل كلّاً من العددين المركبين الآتيين في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$$5 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \quad (6)$$

$$4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad (5)$$



أوجد الناتج لكلّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (7)$$

$$8 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \div 4 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \quad (8)$$

أوجد الناتج لكلّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$$(1 + i)^{10} \quad (10)$$

$$(-\sqrt{3} + i)^5 \quad (9)$$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعددين المركبين الآتيين:

$$\text{الجذور السباعية للعدد } i \quad (12)$$

$$\text{الجذور الرباعية للعدد } -8 + 8\sqrt{3}i \quad (11)$$

(13) كهرباء: أوجد شدة التيار المار في دائرة كهربائية فرق جهدها 12 V، ومعاوقتها $\Omega (2 - 4j)$ مستعملًا الصيغة

$$V = I \cdot Z, \text{ حيث } V \text{ فرق الجهد بالفولت، و } I \text{ شدة التيار بالأمبير، و } Z \text{ المعاوقة بالأوم (قرب إلى أقرب جزء من}$$

عشرة).

(إرشاد: يستعمل مهندسو الكهرباء الرمز j للدلالة على العدد التخيلي i ؛ لذا فهم يكتبون العدد المركب على

الصورة $a + bj$).



حدّد ما إذا كان كل من الموقفين الآتيين يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية؛ فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت متحيزة أم لا:

- (1) من 300 طالب، اختر 150 طالباً ممن يلعبون الشطرنج، وقارن بين درجاتهم.
- (2) اختر 1000 شخص ووزّعهم عشوائياً في مجموعتين، أعطِ إحدى المجموعتين فيتاميناً، ولا تُعطِ للأخرى شيئاً.

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالتين الآتيتين تتطلب دراسة مسحية أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك.

- (3) تريد مقارنة صحّة الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة سيراً على الأقدام، والذين يأتون بالحافلات المدرسية.
- (4) تريد معرفة ما إذا كان الطلاب الذين يأكلون حلوى قبل الاختبار مباشرة يحصلون على درجات أعلى من أولئك الذين لا يأكلون الحلوى.

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطاً أم سببية، وفسّر إجابتك:

- (5) إذا مارستُ رياضة الركض يومياً، فسأكمل السباق
 - (6) عندما لا تكون السماء غائمة، فلن تمطر.
- في ثلاث ساعات.

- (7) دلّت الدراسات على أن تناول الفيتامينات المركّبة يحافظ على صحّة الجسم.
- (8) إذا درست لمدة ثلاث ساعات، سأحصل على درجة 100% في اختبار التاريخ.



أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات الآتية بشكل أفضل؟ ولماذا؟

(1) {12.1, 14.9, 6.7, 10, 12.8, 14, 18}

(2) {77.9, 101, 78.9, 105, 4.2, 110, 87.9}

(3) {10, 14.7, 14.7, 21, 7.4, 14.7, 8, 14.7}

(4) {29, 36, 14, 99, 16, 15, 12, 30}

(5) **سيارات:** في دراسة مسحية شملت 56 شخصًا اختيروا عشوائيًا في إحدى المدن وُجد أن 14% منهم يقودون سيارات بيضاء اللون. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين يقودون سيارات بيضاء؟

(6) **شواطئ البحر:** في دراسة مسحية شملت 812 شخصًا اختيروا عشوائيًا وُجد أن 57% ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي؟

(7) أوجد الانحراف المعياري للبيانات في كل من a, b، وقربه إلى أقرب جزء من مئة.

(a)

عدد مرات فوز كل لاعب في فريق تنس الطاولة في الموسم الماضي					
8	4	17	9	2	10
5	19	15	10	9	9

(b)

الدرجات التي حصل عليها 18 طالبًا اختيروا عشوائيًا من طلاب الصف الثالث الثانوي					
9	10	5	4	10	7
3	4	4	6	5	11
9	3	5	8	7	12



أُلقي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة. أوجد احتمال كل مما يأتي:

- (1) ظهور العدد 5 على وجهي المكعبين علمًا بأن العدد نفسه ظهر عليهما.
- (2) ظهور العدد 4 على وجهي المكعبين علمًا بأن العددين الظاهرين، كل منهما يزيد على 3.
- (3) عدم ظهور العدد 2 على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين زوجيان.

(4) **كيمياء:** يختبر كل من أحمد ووليد درجة الحموضة (PH) لـ 32 مركبًا في إحدى تجارب الكيمياء، وقد قسموا العمل بينهما كما في الجدول المجاور. إذا اختير مركب عشوائيًا، فأوجد كل احتمال فيما يأتي:

نتائج	وليد	أحمد
حامضي	12	8
قاعدي	9	3

(a) أن يكون المركب حامضيًا علمًا بأن وليدًا هو الذي اختبره.

(b) أن يختبر أحمد المركب علمًا بأن النتيجة "قاعدي".

(5) انتخابات: تنافس المرشحان (A)، (B) على رئاسة اللجنة الاجتماعية ضمن منطقة تشتمل على أربع مجتمعات سكنية (المجمع 1، والمجمع 2، والمجمع 3، والمجمع 4). والجدول أدناه يمثل الأصوات التي حصل عليها المرشحان.

المجمع 1	المجمع 2	المجمع 3	المجمع 4	
61	54	40	30	المرشح (A)
65	50	40	45	المرشح (B)

إذا اختير شخص عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

- (a) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح A علمًا بأنه من المجمع 4.
- (b) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح B علمًا بأنه من المجمع 3.

(6) **كرة سلة:** أحرز أحد لاعبي كرة السلة 194 هدفًا خلال العام الحالي، بينما كان رصيده من الأهداف في الأعوام السابقة 2162 هدفًا. إذا علمت أن الجدول أدناه يُمثل الأهداف التي سجّلها خلال العام الحالي والأعوام السابقة، واختير هدف عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

هدف بنقطة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط	مجموع الأهداف
150	39	5	194
1721	386	55	2162

- (a) الهدف بنقطة واحدة علمًا بأن الهدف قد سجّل خلال العام الحالي.
- (b) الهدف بنقطتين علمًا بأن الهدف قد سجّل في الأعوام السابقة.



(1) **بالونات:** يحتوي كيس على بالونة خضراء، و 4 بالونات حمراء، و 5 بالونات صفراء. إذا سُحِبَت منه بالونتان معًا عشوائيًا، فأوجد كلاً ممّا يأتي:

- (a) (البالونتان حمراوان) P (b) (بالونة حمراء والأخرى صفراء) P (c) (بالونة صفراء والأخرى خضراء) P
(d) (البالونتان خضراوان) P (e) (بالونتان صفراوان) P (f) (بالونة حمراء والأخرى خضراء) P

(2) **واجبات:** لدى سعود 5 واجبات منزلية للمواد: الرياضيات، الكيمياء، الفيزياء، الأحياء، اللغة الإنجليزية. إذا أراد حلّها جميعًا في ذلك اليوم، فما احتمال أن تكون أول مادتين يقوم بحلّهما هما الرياضيات والفيزياء، علمًا بأن لكل مادة الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم؟

(3) **ورق الجدران:** زار جاسم معرض ورق الجدران؛ ليشتري ورقًا لمنزله الجديد. ووجد لدى المعرض 28 كتابًا يحتويون على عينات ورق الجدران، منها 10 كتب لعينّات تخطيط ورسم، و 18 كتابًا لعينّات مناظر طبيعية. إذا سمح المعرض لجاسم أن يصطحب معه 4 كتب إلى البيت ليتقّي منها، فاختر 4 كتب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكتب جميعها من كتب التخطيط والرسم؟

(4) **اتصالات:** استعمل الجدول أدناه الذي يُبين التوزيع الاحتمالي لعدد الهواتف النقالة في منزل كل طالب من طلاب مدرسة.

X عدد الهواتف النقالة	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.01	0.16	0.34	0.39	0.10

(a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا.

(b) إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون في منزله أكثر من 3 هواتف؟

(c) مثّل البيانات بالأعمدة.

عدد الهواتف في منازل طلاب المدرسة



حدّد ما إذا كانت البيانات الآتية تظهر التواءً موجباً أم التواءً سالباً أم موزّعة طبيعياً:

أعمار موظفي إحدى الشركات الخاصة	
العدد	العمر بالسنوات
3	31-35
8	36-40
15	41-45
32	46-50
40	51-55
38	56-60
4	61-65

(2)

زمن البقاء في المتحف بالدقيقة	
الزمن بالدقيقة	التكرار
0-25	27
26-50	46
51-75	89
76-100	57
101-125	24

(1)

(3) دراسة: يوضح الجدول المجاور عدد ساعات الدراسة في الأسبوع لـ 100 طالب في مدرسة ثانوية.

الطلاب	عدد ساعات الدراسة
30	0-8
45	9-17
20	18-26
5	27-35

(a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح عدد ساعات دراستهم بين 9-17 ساعة؟

(b) هل تُظهر البيانات التواءً موجباً، أم التواءً سالباً، أم موزّعة طبيعياً؟ وضح إجابتك.

(4) اختبارات: تتوزّع درجات اختبار طُبّق على بعض المستخدمين، توزيعاً طبيعياً بمتوسط 100 وانحراف معياري 15. إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً.

(a) ما احتمال أن تقع درجته بين 70، 130؟

(b) ما احتمال أن تقع درجته بين 85، 130؟

(c) ما احتمال أن تزيد درجته على 115؟

(d) ما احتمال أن تقل درجته عن 85 أو تزيد على 115؟

(e) إذا تقدّم للاختبار 80 مستخدماً، فكم تتوقع عدد الذين يحصلون على درجات تزيد على 130؟

(5) درجات حرارة: تتوزّع درجات حرارة ماء البحر في أحد الأشهر توزيعاً طبيعياً بمتوسط 27.5°C ، وانحراف معياري 2°C ، إذا كنت تُفضّل ألا تقل درجة حرارة الماء عن 25.5°C كي تسبح في البحر، واخترت أحد أيام هذا الشهر عشوائياً، فما احتمال أن يكون هذا اليوم مناسباً لك للسباحة؟



(1) قطع نقود: إذا أُلقيت قطعة نقد 6 مرات متتالية. أوجد كلاً مما يأتي:

- (a) (ظهور الكتابة 3 مرات) P
- (b) (ظهور الكتابة 5 مرات) P
- (c) (عدم ظهور الكتابة) P
- (d) (ظهور الكتابة 4 مرات على الأقل) P

(2) ضربات حرة: احتمال أن يحرز لاعب كرة قدم هدفاً من ضربة حرة $\frac{2}{3}$. إذا ضرب 5 ضربات حرة، فأوجد كلاً مما يأتي:

- (a) (عدم إحراز أي هدف) P
- (b) (إحراز أهداف من جميع الضربات) P
- (c) (إحراز هدفين) P
- (d) (إحراز هدفين على الأكثر) P

(3) سلامة مرورية: أشارت دراسة أن 73% ممن يقودون السيارات، يستعملون حزام الأمان. إذا اختير 10 أشخاص عشوائياً، فما احتمال أن يكون نصفهم يستعملون حزام الأمان؟

(4) مواصلات: في استطلاع للرأي أُجري مؤخراً، تبين أن 80% من سكان إحدى المناطق يستعملون سياراتهم الخاصة في الذهاب إلى أعمالهم. إذا تم اختيار ثلاثة أشخاص من سكان هذه المنطقة عشوائياً وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون سياراتهم الخاصة للذهاب إلى أعمالهم.

(a) كَوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يدل على عدد الأشخاص الذين أجابوا بنعم.

(b) أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر معنى المتوسط في سياق هذا الموقف.



الفصل الثامن: النهايات والاشتقاق

تقدير النهايات بيانياً

8-1

قدّر - إن أمكن - كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{|x-3|} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - \sqrt{x}) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+7}{x^2+8x+7} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+7}{x^2+8x+7} \quad (5)$$

قدّر - إن أمكن - كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x-1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{x^2+1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2.7)^{3x+2} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (9)$$

(11) **معدل التغير:** يرتكز سلم طوله 20 ft على جدار. سُحِبَت قاعدة السلم بعيداً عن الجدار بمعدل 3 ft/sec. فبدأ الطرف العلوي للسلم بالهبوط بمعدل $r(x) = \frac{3x}{\sqrt{400-x^2}}$ قدماً لكل ثانية، حيث x المسافة بين قاعدة السلم والجدار. قدّر $\lim_{x \rightarrow 20^-} r(x)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية.

(12) **كتب:** تمثل الدالة $v(t) = \frac{300}{6+35(0.2)^t}$ سعر كتاب بالريال بعد t سنة من نشره. كم يكون الثمن النهائي للكتاب؟ أي أوجد $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية.

(13) **تلوث:** يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بالدالة $C(x) = \frac{312x}{100-x}$ ، حيث C التكلفة بالريال، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0 \leq x < 100$. قدّر $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x)$.



احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 - 36}{x + 6} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x - 8) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2 - 9}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{2 + \sqrt{x-3}} \quad (6)$$

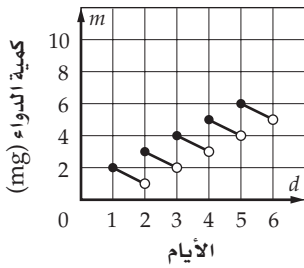
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 8x^2}{4x^5 + 3x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 6x + 5x^3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^7 - x^2) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 1}{5x^4 - 2x^2} \quad (9)$$



(11) دواء: يتناول عامر 2mg من الدواء يومياً، ويبيّن الشكل المجاور كمية الدواء $m(d)$ المتبقية في دمه بعد d يوماً. أوجد $\lim_{d \rightarrow 3^+} m(d)$ ، $\lim_{d \rightarrow 3^-} m(d)$.



أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

$$y = \frac{5}{x}, (-1, -5) \quad (2)$$

$$y = x^2 - x, (3, 6) \quad (1)$$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه :

$$y = x^3 - 2x^2 \quad (4)$$

$$y = -2x + 1 \quad (3)$$

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي، بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى :

$$h(t) = -16t^2 + 200t + 700, t = 3 \quad (6)$$

$$h(t) = 300 - 16t^2, t = 2 \quad (5)$$

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :

$$h(t) = 5t^3 - 6t^2 + 4t + 1 \quad (8)$$

$$h(t) = 17t^2 + 8 \quad (7)$$

$$h(t) = \frac{3}{t} + 2t \quad (10)$$

$$h(t) = \sqrt{t} - 2t^2 \quad (9)$$

(11) **مظليّ:** يمكن تمثيل ارتفاع مظليّ عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية بالدالة $h(t) = 18000 - 16t^2$. أوجد سرعة المظلي المتجهة اللحظية $v(t)$.

(12) **كرة قدم:** ركل علي كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 58 ft/sec. وتمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 58t + 6$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

(a) أوجد سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$.

(b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 1.5 sec ؟



أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة :

$$h(x) = 4x^3 - x^2, x = 3, 0 \quad (2)$$

$$g(x) = 3x^2 - 5x, x = -2, 1 \quad (1)$$

$$m(x) = -2x^2 - 6x + 1, x = 0, -3 \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, x = 2, -3 \quad (3)$$

$$t(x) = 3x^7 - 1, x = -1, 1 \quad (6)$$

$$q(x) = -1 + x^3 - 2x^4, x = -1, 3 \quad (5)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$f(x) = x^2 (x^3 + 3x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = (x^2 + 5x)^2 \quad (7)$$

$$h(x) = -\frac{3}{x^6} \quad (10)$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^6} \quad (9)$$

$$n(x) = (3x^2 - 2x)(x^3 + x^2) \quad (12)$$

$$p(x) = -4x^5 + 6x^3 - 5x^2 \quad (11)$$

$$q(x) = \sqrt{x} (x^2 - 3) \quad (14)$$

$$r(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2} \quad (13)$$

(15) فيزياء: تسارع جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل الدالة $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة).



قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x ، على الفترة المعطاة في كل مما يأتي باستعمال الطرف المعطى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 4 \quad (2)$$

$$[2, 5]$$

الطرف الأيمن

$$f(x) = x + 3 \quad (1)$$

$$[1, 5]$$

الطرف الأيسر

$$f(x) = 1 + x^2 \quad (4)$$

$$[1, 6]$$

الطرف الأيمن

$$f(x) = 3x^3 \quad (3)$$

$$[0, 4]$$

الطرف الأيسر

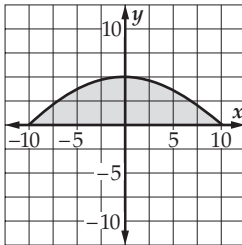
استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

$$\int_1^6 6x^2 dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 x^2 dx \quad (5)$$

$$\int_{-2}^1 (-x^2 - 2x + 11) dx \quad (8)$$

$$\int_1^3 (x^2 - x) dx \quad (7)$$



(9) تصميم وعمارة: يصمم مهندس نافذة زجاجية يمكن نمذجتها بـ $y = 5 - 0.05x^2$ ، والممثلة بيانياً في الشكل المجاور. ما مساحة سطح النافذة؟



النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = 2x + 3 \quad (2)$$

$$f(x) = 4x^3 \quad (1)$$

$$f(x) = 8x^2 + 2x - 3 \quad (4)$$

$$f(x) = x(x^2 - 3) \quad (3)$$

احسب كل تكامل مما يأتي :

$$\int (2x^3 + 6x) dx \quad (6)$$

$$\int 8 dx \quad (5)$$

$$\int_2^5 2x dx \quad (8)$$

$$\int (-6x^5 - 2x^2 + 5x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-2}^1 (1-x)(x+3) dx \quad (10)$$

$$\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2) dx \quad (9)$$

(11) **فيزياء:** الشغل اللازم بوحدة الجول لضغط نابض مسافة ℓ قدم من وضعه الطبيعي يُعطى بالصيغة

$$W = \int_0^{\ell} 2x dx . \text{ ما مقدار الشغل اللازم لضغط النابض مسافة 6 in من وضعه الطبيعي؟}$$

(12) **أعمال النجارة:** افرض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة p قطعة أثاث مُعطى بالتكامل

$$h = \int_0^p (30 - 3x) dx , \text{ فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟}$$

